ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ HUYỀN

BÀI TOÁN BIÊN-GIÁ TRỊ BAN ĐẦU CHO PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC TUYẾN TÍNH CẤP HAI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ HUYỀN

BÀI TOÁN BIÊN-GIÁ TRỊ BAN ĐẦU CHO PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC TUYẾN TÍNH CẤP HAI

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS.TS. HÀ TIẾN NGOẠN

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Mở đầu

1 Lý do chọn đề tài

Trong chương trình của bậc đại học, bước đầu chúng ta đã được làm quen với môn phương trình đạo hàm riêng. Trong đó, ta đã biết được các vấn đề cơ bản liên quan đến phương trình Laplace, phương trình truyền sóng, phương trình truyền nhiệt. Đó là các phương trình đơn giản lần lượt đại diện cho ba lớp phương trình đạo hàm riêng là phương trình elliptic, hypebolic và parabolic. Khi học ta thấy rằng, điều kiện tồn tại nghiệm theo nghĩ thông thường đòi hỏi khá nhiều yếu tố khắt khe như tính trơn của phương trình, điều này gây khó khăn khi xét các bài toán đối với phương trình trên những miền bất kỳ hoặc đối với những bài toán của các phương trình tổng quát hơn. Để khắc phục điều này, thay vì đi tìm nghiệm cổ điển, người ta đi tìm nghiệm suy rộng, tức là nghiệm có độ khả vi không cao. Sau đó nhờ các công cụ của giải thích hàm, người ta nghiên cứu sự tồn tại, tính duy nhất và độ trơn của nghiệm suy rộng. Chính vì vậy, phương trình đạo hàm riêng còn là vấn đề rất mới mẻ và bí ẩn kích thích sự yêu thích của những sinh viên yêu thích nó. Nhằm góp phần giúp những bạn sinh viên và những độc giả yêu môn phương trình đạo hàm riêng nói chung và bản thân tác giả nói riêng hiểu sâu hơn về môn học này và tiếp tục tìm hiểu khám phá, tôi mạnh dạn nghiên cứu đề tài: *"Bài toán biên giá trị ban đầu của phương trình parabolic cấp hai"*.

2 Đối tượng - Phương pháp - Phạm vi nghiên cứu

2.1 Đối tượng nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu là bài toán biên-giá trị ban đầu thứ nhất đối với phương trình parabolic cấp hai

2.2 Phương pháp nghiên cứu

Phương pháp nghiên cứu chủ yếu là sưu tầm tài liệu, đọc hiểu tài liệu trên cơ sở đó phân tích, tổng hợp, diễn giải, làm rõ và trình bày một hệ thống để giải quyết các vấn đề đặt ra của luận văn.

2.3 Phạm vi nghiên cứu

Phạm vi nghiên cứu của luận văn là phương trình parabolic tuyến tính cấp hai.

3 Mục đích - nhiệm vụ và những đóng góp của luận văn

3.1 Mục đích nghiên cứu

Mục đích nghiên cứu của luận văn là tìm hiểu sâu hơn về môn phương trình đạo hàm riêng, cụ thể là phương trình parabolic cấp hai. Đóng góp thêm một tài liệu tham khảo cho giảng viên, sinh viên và tất cả những ai quan tâm đến môn phương trình đạo hàm riêng.

3.2 Nhiệm vụ của luận văn

Với mục đích đặt ra, nhiệm vụ nghiên cứu của luận văn là nghiên cứu về bài toán biên-giá trị ban đầu đối với phương trình parabolic cấp hai. Luận văn gồm hai chương:

- *Chương 1. Một số kiến thức liên quan* mô tả một số không gian Sobolev thích hợp đối với nghiệm của phương trình parabolic.

- *Chương 2. Bài toán biên-giá trị ban đầu của phương trình parabolic* trình bày khái niệm phương trình parabolic nói chung và phương trình truyền nhiệt nói riêng, phát biểu bài toán biên-giá trị ban đầu thứ nhất, đưa vào xét nghiệm suy rộng của bài toán biên-giá trị ban đầu thứ nhất đối với phương trình truyền nhiệt. Ngoài ra chương hai trình bày các định lý về sự tồn tại và duy nhất của nghiệm suy rộng bài toán biên-giá trị ban đầu thứ nhất đối với phương trình parabolic tổng quát dạng bảo toàn, nghiệm suy rộng của bài toán biên-giá trị ban đầu thứ hai và thứ ba.

Tài liệu tham khảo chính của luận văn là tài liệu [1], trong đó trình bày các loại nghiệm suy rộng của phương trình parabolic. Khi các nghiệm suy rộng là các hàm trơn thì chúng là nghiệm cổ điển của các phương trình này mà được nghiên cứu trong [2].

3.3 Những đóng góp của luận văn

Đóng góp nổi bật của luận văn là cung cấp được các khái niệm và kết quả chuyên sâu về nghiệm suy rộng của phương trình parabolic cấp hai dạng bảo toàn. Đó là các khái niệm mới như: định nghĩa đạo hàm riêng suy rộng, các không gian Sobolev. Đặc biệt nó giúp ta có một phương pháp mới đi nghiên cứu bài toán biên-giá trị ban đầu đối với phương trình parabolic cấp hai.

Chương 1

Một số kiến thức liên quan

Các kiến thức cơ sở trong chương này đều được lấy từ tài liệu [1].

1.1 Không gian Sobolev

1.1.1 Không gian $L_2(\Omega)$

Giả sử Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$ với tích vô hướng

$$(f(x), g(x))_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

và chuẩn tương ứng

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right]^{1/2}.$$

1.1.2 Không gian $W_2^m(\Omega)$

Giả sử m là các số tự nhiên ta kí hiệu $W_2^m(\Omega)$ là không gian Sobolev gồm tất cả các hàm $u(x) \in L_2(\Omega)$, sao cho tất cả các đạo hàm suy rộng theo x đến cấp m thuộc $L_2(\Omega)$. Không gian $W_2^m(\Omega)$ là không gian Banach với chuẩn sau

$$\|u\|^2_{W_2^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx \tag{1.1}$$

trong đó

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ là đa chỉ số;

$$D = (D_1, D_2, \dots, D_n), \quad D^\alpha = D_1^\alpha D_2^\alpha \dots D_n^\alpha, \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Không khó khăn khi có thể kiểm tra $W_2^m(\Omega)$ là một không gian Hilbert với tích vô hướng

$$(u,v)_{W_2^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v dx.$$

1.1.3 Không gian $W^{m,\ell}(Q_T)$

Giả sử Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ với biên $\partial\Omega$ và $T = \text{const} > 0$. Kí hiệu

$$Q_T = \Omega \times (0,T) = \{(x,t) : x \in \Omega, t \in (0;T)\}$$

và được gọi là miền trụ đáy Ω.

Giả sử m, ℓ là các số tự nhiên ta kí hiệu $W^{m,\ell}(Q_T)$ là không gian Sobolev gồm tất cả các hàm $u(x,t) \in L_2(Q_T)$, sao cho tất cả các đạo hàm suy rộng theo x đến cấp m và theo t đến cấp ℓ thuộc $L_2(Q_T)$. Không gian $W^{m,\ell}(Q_T)$ là không gian Banach với chuẩn

$$\|u\|^2_{W^{m,\ell}(Q_T)} = \sum_{|\alpha|\le m} \int_{Q_T} |D^\alpha u|^2 dxdt + \sum_{k=1}^{\ell} \int_{Q_T} \left| \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right|^2 dxdt. \tag{1.2}$$

Trường hợp $\ell = 0$ số hạng thứ hai trong vế phải của (1.2) coi như không có. Không khó khăn khi có thể kiểm tra $W_2^{m,\ell}(Q_T)$ là một không gian Hilbert với tích vô hướng

$$(u,v)_{W_2^{m,\ell}(Q_T)} = \sum_{|\alpha|\le m} \int_{Q_T} D^\alpha u D^\alpha v dxdt + \sum_{k=1}^{\ell} \int_{Q_T} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \frac{\partial^k v}{\partial t^k} dxdt.$$

1.2 Bất đẳng thức tích phân

Giả sử $y(t)$ là hàm không âm và hoàn toàn liên tục trên $[0,T]$ và với hầu hết t trong $[0,T]$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$\frac{dy(t)}{dt} \leq c_1(t)y(t) + c_2(t), \tag{1.3}$$

ở đó $c_i(t)$ là khả tích không âm trên $[0,T]$. Khi đó với mọi t, $0 \leq t \leq T$ ta có đánh giá sau đây đối với $y(t)$

$$\begin{aligned} y(t) &\leq \exp\left\{\int_0^t c_1(t)dt\right\}\left[y(0) + \int_0^t c_1(\xi)\exp\left\{-\int_0^\xi c_1(t)dt\right\}d\xi\right] \\ &\leq \exp\left\{\int_0^t c_1(t)dt\right\}\left[y(0) + \int_0^t c_2(t)dt\right]. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Thật vậy, nếu ta nhân (1.3) với $\exp\left\{-\int_0^t c_1(t)dt\right\}$, ta có thể viết kết quả dưới dạng

$$\frac{d}{dt}\left[y(t)\exp\left\{-\int_0^t c_1(t)dt\right\}\right] \leq c_2(t)\exp\left\{-\int_0^t c_1(t)dt\right\}. \tag{1.5}$$

và nếu ta tích phân hai vế của (1.5) từ 0 đến t thì sẽ suy ra (1.4).

Nếu $c_1(t) = c_1 = \text{const} > 0$ và $c_2(\cdot)$ là một hàm số không giảm trên t thì từ (1.2) và (1.4) ta có các bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} y'(t) &\leq e_1^{c_1 t}[c_1 y(0) + c_2(t)] \\ y(t) &\leq e_1^{c_1 t}y(0) + c_1^{-1}c_2(t)[e^{c_1 t} - 1]. \end{aligned} \tag{1.6}$$